

Knotentheorie

Polynom Invarianten

von Martin Reuter

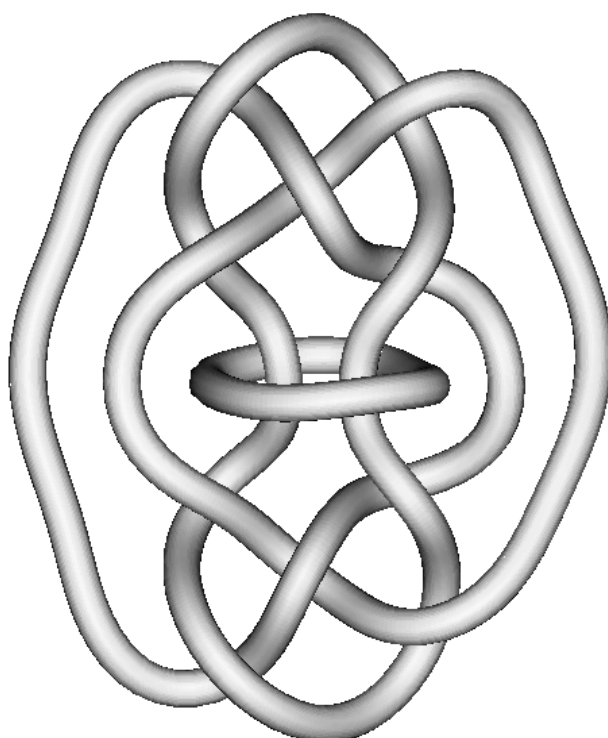
Reuter@informatik.uni-hannover.de

am

Institut für Informatik der Universität Hannover

Lehrstuhl für Graphische Datenverarbeitung

Prof. Dr. F.-E. Wolter



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung:	2
2	Klammer- und Jones-Polynom:	3
3	Polynome alternierender Knoten:	8
4	Alexander- und HOMFLY-Polynom:	16

1 Einleitung:

In diesem Vortrag wird eine der erfolgreichsten Methoden vorgestellt, die Verschiedenheit von Knoten festzustellen. Als Quelle diente hauptsächlich Adams [1] Kapitel 6. Jedem Knoten wird ein Polynom zugeordnet. Da es aus jeder beliebigen Projektion berechnet werden kann, ist es eine Knoteninvariante. Sind zwei Polynome verschieden, so wissen wir gleich, daß die zugehörigen Polynome verschieden sein müssen. Dadurch erweisen sich z.B. der Unknoten (Jones-Polynom 1) und der 6_2 Knoten (unten als DNS-Molekül dargestellt) als verschieden.

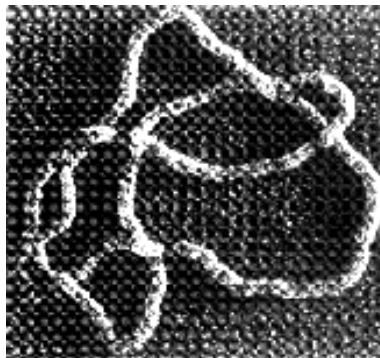


Abb. 1.1: Verknotungen in einem DNS-Molekül unter dem Elektronenmikroskop

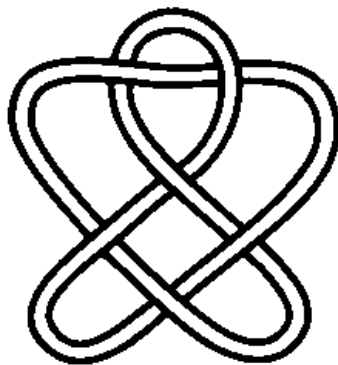


Abb. 1.2: Das Jones-Polynom des 6_2 Knotens ist $V(t) = t^{-5} - 2t^{-4} + 2t^{-3} - 2t^{-2} + 2t^{-1} - t^{-1} + 1$

2 Klammer- und Jones-Polynom:

Um das Jones-Polynom zu definieren, betrachten wir zuerst ein Knotenpolynom, das den Namen **Klammer-Polynom** erhielt. Es soll einige Bedingungen erfüllen und wird für einen Knoten K mit $\langle K \rangle$ bezeichnet.

Triviale Regel:

Regel 1: $\langle \bigcirc \rangle = 1$

Flechtrelation bzw. Aufspaltung:

Regel 2: $\begin{cases} \langle \times \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + B \langle \curvearrowright \rangle \\ \langle \times \rangle = A \langle \curvearrowleft \rangle + B \langle \rangle \langle \rangle \end{cases}$

Addition des Unknotens:

Regel 3: $\langle L \cup \bigcirc \rangle = C \langle L \rangle$

Da unser Polynom eine Invariante der Verschlingung werden soll, darf es sich nicht bei *Reidemeister-Bewegungen* ändern. Wir werden also untersuchen, was bei der Anwendung von Reidemeister-Bewegungen mit dem Polynom geschieht.

Die Wirkung einer Reidemeister-Bewegung vom Typ II auf das Klammer-Polynom:

$$\begin{aligned} \langle \overline{\times} \rangle &= A \langle \curvearrowright \rangle + B \langle \overline{\times} \rangle \\ &= A(A \langle \curvearrowleft \rangle + B \langle \overline{\times} \rangle) + B(A \langle \overline{\times} \rangle + B \langle \curvearrowleft \rangle) \\ &= A(A \langle \rangle \langle \rangle + BC \langle \curvearrowleft \rangle) + B(A \langle \curvearrowright \rangle + B \langle \curvearrowleft \rangle) \\ &= (A^2 + ABC + B^2) \langle \curvearrowleft \rangle + BA \langle \rangle \langle \rangle \\ &\doteq \langle \rangle \langle \rangle \end{aligned}$$

Um das Polynom bei dieser Bewegung nicht zu verändern, setzen wir $B := A^{-1}$ und erhalten als zweiten Koeffizient 1. Nun ergibt sich der erste Koeffizient zu $A^2 + C + A^{-2}$. Setzen wir $C := -A^2 - A^{-2}$ so ergibt sich dieser zu Null. Unter diesen Voraussetzungen ist das Klammer-Polynom bei Reidemeister-Bewegungen vom Typ II invariant. Folglich vereinfachen sich auch die drei Regeln.

Regel 1: $\langle \bigcirc \rangle = 1$

$$\text{Regel 2: } \begin{cases} \langle \times \rangle = A \langle \rangle + A^{-1} \langle \rangle \\ \langle \times \rangle = A \langle \rangle + A^{-1} \langle \rangle \end{cases}$$

Regel 3: $\langle L \cup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle$

Die Wirkung einer Reidemeister-Bewegung vom Typ III auf das Klammer-Polynom:

$$\begin{aligned} \langle \times \rangle &= A \langle \rangle + A^{-1} \langle \rangle \\ &= A \langle \rangle + A^{-1} \langle \rangle = \langle \times \rangle \end{aligned}$$

Haben wir das Klammer-Polynom erst so bestimmt, daß Reidemeister-Bewegungen vom Typ II es invariant lassen, so ergibt sich diese Eigenschaft für Reidemeister-Bewegungen vom Typ III von selbst.

Bevor wir nun noch die Reidemeister-Bewegung vom Typ I diskutieren, wollen wir versuchen, das Klammer Polynom der einfachsten nichttrivialen Verschlingung mit zwei Komponenten zu berechnen.

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \rangle &= A \langle \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \rangle \\ &= A (A \langle \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \rangle) \\ &\quad + A^{-1} (A \langle \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \rangle) \\ &= A(A(-A^2 - A^{-2})) + A^{-1}(1) \\ &\quad + A^{-1}(A(1) + A^{-1}(-A^2 - A^{-2})) \\ &= -A^4 - A^{-4} \end{aligned}$$

Bei den Reidemeister-Bewegungen vom Typ I sieht es schlecht aus. Das Polynom hängt offensichtlich von der vorgegebenen Knotenprojektion ab:

$$\begin{aligned} \langle \vartheta \rangle &= A \langle \vartheta \rangle + A^{-1} \langle \vartheta \rangle \\ &= A(-A^2 - A^{-2}) \langle - \rangle + A^{-1} \langle - \rangle \\ &= -A^3 \langle - \rangle \\ \langle \vartheta \rangle &= A \langle \vartheta \rangle + A^{-1} \langle \vartheta \rangle \\ &= A \langle - \rangle + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) \langle - \rangle \\ &= -A^{-3} \langle - \rangle \end{aligned}$$

Um Abhilfe zu schaffen wollen wir unserem Knoten oder unserer Verschlingung eine Orientierung geben. Nun können wir die Kreuzungen auf folgende Weise mit +1 oder -1 kennzeichnen:

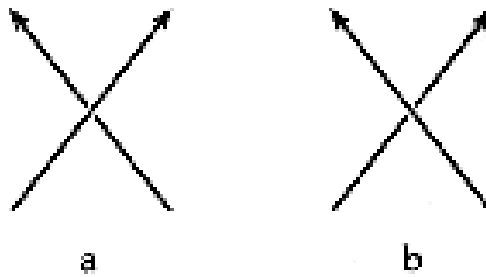


Abb. 2.1: (a) +1 Kreuzung. (b) -1 Kreuzung

2.1 Definition:

Die Summe aller +1en und -1en ist die *Windungszahl*. Sie wird mit $\omega(L)$ bezeichnet.

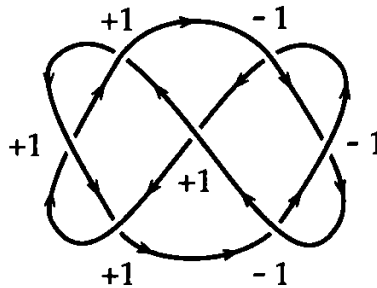


Abb. 2.2: $\omega(L) = +4 - 3 = 1$

2.2 Satz:

Die Windungszahl ist bei Reidemeister-Bewegungen vom Typ II und III invariant. Allerdings wird sie bei Reidemeister-Bewegungen vom Typ I um den Summanden ± 1 verändert. (Beweis: Aufzeichnen mit Fallunterscheidung)

Wir definieren nun eine neue polynome Invariante von orientierten Verschlingungsprojektionen, die wir das X-Polynom nennen:

2.3 Definition:

$$X(L) := (-A^3)^{-\omega(L)} \langle L \rangle$$

Reidemeister-Bewegungen vom Typ II und III haben weder auf $\omega(L)$ noch auf $\langle L \rangle$ Einfluß, und somit auch nicht auf $X(L)$. Was geschieht aber bei einer Reidemeister-Bewegung vom Typ I? Versuchen wir nun eine Schlaufe zu entfernen.



Abb. 2.3: Typ I Bewegung: $\omega(L') = \omega(L) + 1$

$$\begin{aligned} X(L') &= (-A^3)^{-\omega(L')} \langle L' \rangle \\ &= (-A^3)^{-(\omega(L)+1)} \langle L' \rangle \\ &= (-A^3)^{-(\omega(L)+1)} ((-A^3) \langle L \rangle) \\ &= (-A^3)^{-\omega(L)} \langle L \rangle = X(L) \end{aligned}$$

Ähnlich sieht man auch bei der anderen Variante der Bewegung vom Typ I, daß das X-Polynom unverändert bleibt.

2.4 Satz:

Daher ist das X-Polynom $X(L)$ eine Invariante von orientierten Knoten und Verschlingungen.

2.5 Definition:

Das *Jones Polynom* erhält man, indem man in $X(L)$ die Variable A durch $t^{-\frac{1}{4}}$ ersetzt.

Es hat nicht mehr notwendig ganzzahlige Exponenten und wurde von Jones im Jahre 1984 publiziert. Es wird mit $V(L)$ oder manchmal mit $V(t)$ bezeichnet, wenn klar ist, auf welche Verschlingung es sich bezieht.

Offene Frage:

Kann man mit Hilfe des Jones Polynoms jeden Knoten vom Unknoten unterscheiden? Niemand hat bisher einen nichttrivialen Knoten mit Jones Polynom gleich 1 gefunden, es konnte bisher aber auch niemand beweisen, daß es ihn nicht gibt.

2.6 Satz:

Das Jones Polynom erfüllt auch eine eigene Flechtrelation. Seien L_+ , L_- und L_0 drei orientierte Verschlingungsprojektionen, die sich außer in den Kreuzungen nicht unterscheiden:

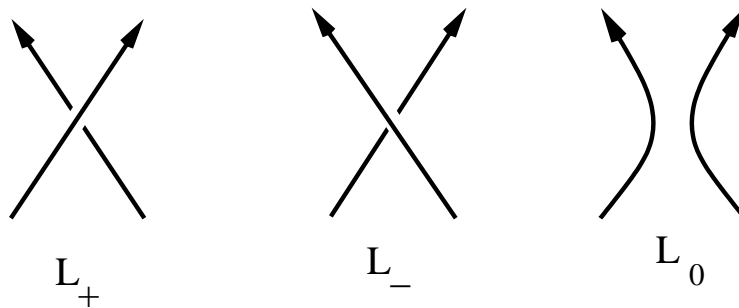


Abb. 2.4: Drei fast identische Kreuzungen

Man kann nun leicht mit Hilfe der Flechtrelation der Klammer-Polynome zeigen, daß die Jones-Polynome der drei Verschlingungen folgender Gleichung genügen:

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})V(L_0) = 0$$

3 Polynome alternierender Knoten:

Wir wollen nun mit Hilfe der Regel 2 aus einer anderen Sicht über das Klammer-Polynom nachdenken. Wir werden die vier Gebiete, die an einer Kreuzung aufeinandertreffen mit A und B nach folgender Regel kennzeichnen: Rotiert man die Überführung gegen den Uhrzeigersinn, so werden die beiden A Gebiete überstrichen, die andern beiden Gebiete markieren wir mit B.

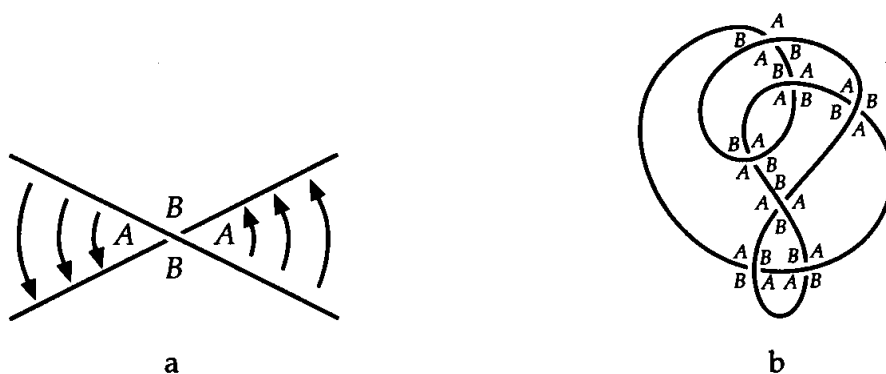


Abb. 3.1: (a) Markierte Kreuzung (b) und Projektion

Bei Anwendung der Regel 2 wird eine Kreuzung auf zwei verschiedene Arten aufgespalten:

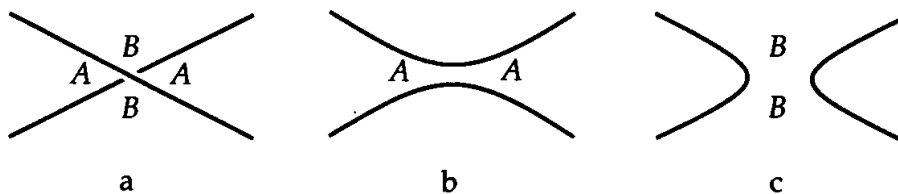


Abb. 3.2: (a) Kreuzung. (b) A-Split. (c) B-Split

Sei nun L eine Verschlingung mit n Kreuzungen. Regel 2 läßt uns das Klammer-Polynom von L aus zwei Verschlingungen berechnen, die je eine Kreuzung weniger als L haben. Wenden wir nun Regel 2 immer wieder an, so erhalten wir am Ende 2^n Verschlingungen ohne Kreuzungen. Eine solche Auswahl von A- oder B-Aufspaltungen nennen wir **Zustand**.

Sei S solch ein Zustand. Da S keine Kreuzungen mehr enthält, muß es eine Menge sich gegenseitig nicht schneidender geschlossener Kurven sein. Sei $|S|$

die Anzahl dieser Kurven, so erhält man das Klammer-Polynom von S einfach indem man $|S| - 1$ mal Regel 3 anwendet. Es werden alle Inseln entfernt, bis man zum Schluß den Unknoten mit Klammer-Polynom 1 erhält. Das Klammer-Polynom von S ergibt sich also zu:

$$\langle S \rangle = (-A^2 - A^{-2})^{|S|-1}$$

Um den Koeffizienten zu berechnen, machen wir uns klar, daß L' aus L durch eine Folge von A- und B-Aufspaltungen entstanden ist. Bei jeder Aufspaltung wird das Polynom also mit A oder A^{-1} multipliziert. Somit ist das Polynom von S mit dem Faktor $A^{a(S)}A^{-b(S)}$ zu multiplizieren, wobei $a(S)$ und $b(S)$ die Zahl der A- bzw. B-Aufspaltungen in S bezeichnet.

3.1 Satz:

Daher ist das Klammer-Polynom der Projektion der Verschlingung L nun einfach die Summe dieser Terme über alle Zustände S :

$$\langle L \rangle = \sum_S A^{a(S)}A^{-b(S)}(-A^2 - A^{-2})^{|S|-1}$$

Um so ein Klammer-Polynom zu berechnen, muß jetzt nur noch jeder mögliche Zustand aufgelistet, und der Term, den er zum Klammer-Polynom beiträgt, berechnet werden.

Beispiel: Berechnung des Klammer-Polynoms der Kleeblattschlinge.

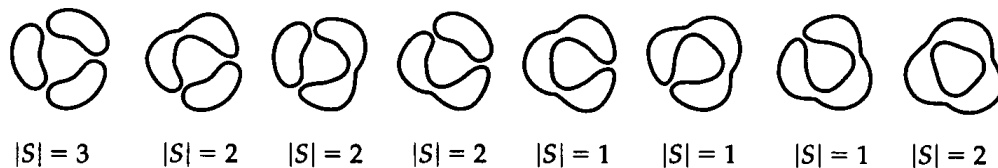


Abb. 3.3: Bei 3 Kreuzungen ergeben sich $2^3 = 8$ Zustände

Und somit

$$\begin{aligned}
 \langle L \rangle &= A^3 A^0 (-A^2 - A^{-2})^{3-1} + A^2 A^{-1} (-A^2 - A^{-2})^{2-1} \\
 &\quad + A^2 A^{-1} (-A^2 - A^{-2})^{2-1} + A^2 A^{-1} (-A^2 - A^{-2})^{2-1} \\
 &\quad + A^1 A^{-2} (-A^2 - A^{-2})^{1-1} + A^1 A^{-2} (-A^2 - A^{-2})^{1-1} \\
 &\quad + A^1 A^{-2} (-A^2 - A^{-2})^{1-1} + A^0 A^{-3} (-A^2 - A^{-2})^{2-1} \\
 &= A^3 (-A^2 - A^{-2})^2 + 3A (-A^2 - A^{-2}) + 3A^{-1} + A^{-3} (-A^2 - A^{-2}) \\
 &= A^7 - A^3 - A^{-5}
 \end{aligned}$$

3.2 Definition:

Eine *alternierende Knotenprojektion* ist eine Projektion, bei der man während des Umlaufs in einer fest gewählten Richtung die aufeinanderfolgenden Kreuzungen abwechselnd oberhalb und unterhalb passiert.

3.3 Definition:

Eine alternierende Knotenprojektion heißt *reduziert*, wenn es darin keine unnötigen Kreuzungen von folgender Art gib:



Abb. 3.4: Unreduzierte alternierende Projektionen

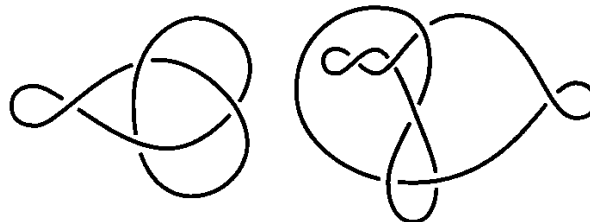


Abb. 3.5: Beispiele unreduzierter alternierender Projektionen

Vermutung 1:

Zwei reduzierte alternierende Knotenprojektionen desselben Knotens haben dieselbe Anzahl von Kreuzungen.

Vermutung 2:

Die Anzahl der Kreuzungen einer reduzierten alternierenden Knotenprojektion ist gleich dem Minimum der Anzahl aller in irgendeiner Knotenprojektion auftretenden Kreuzungen.

Beweis bei Kauffman [2].

Zusammengenommen haben diese Vermutungen die Folge, daß wir die Selbstschnittzahl (minimale Anzahl der Kreuzungen) eines jeden alternierenden Knotens bestimmen können. Wir wollen versuchen die erste Vermutung zu beweisen. Dazu benötigen wir folgende Definitionen und Hilfssätze.

3.4 Definition:

Die Höhe eines Polynoms sei die Differenz zwischen dem kleinsten und dem größten darin vorkommenden Exponenten.

3.5 Satz:

Die Höhe des Klammer-Polynoms ist eine Knoteninvariante.

Beweis:

Reidemeister-Bewegungen vom Typ II und III lassen das Klammer-Polynom und somit die Höhe unverändert. Durch eine Reidemeister-Bewegung vom Typ I wird das gesamte Polynom mit A^3 oder A^{-3} multipliziert. Somit bleibt auch hier die Höhe des Polynoms unverändert.

□

3.6 Satz:

Wenn K eine reduzierte alternierende Projektion mit n Kreuzungen ist, so gilt:

$$\text{Höhe}(\langle K \rangle) = 4n.$$

Beweis:

Da die Höhe ($\langle K \rangle$) nicht von der Projektion abhängt, wählen wir die reduzierte alternierende Projektion von K . Nun wollen wir den höchsten Exponenten des Klammer-Polynoms suchen. Jeder Zustand S trägt den Term

$$A^{a(S)} A^{-b(S)} (-A^2 - A^{-2})^{|S|-1}$$

zum Polynom bei. Wird dieser Ausdruck ausmultipliziert, so ergibt sich als höchster Exponent: $a(S) - b(S) + 2(|S| - 1)$. Wir suchen also einen Zustand für den $a(S)$ und $|S|$ möglichst groß sind und die Zahl $b(S)$ möglichst klein ist. Wir machen einen Versuch und bilden **nur** Aufspaltungen vom Typ A und nennen diesen Zustand S_1 . Da wir n Kreuzungen haben, gilt $a(S_1) = n$ und $b(S_1) = 0$. Der Exponent von A ist also $e_1 := n + 2(|S_1| - 1)$. Bei einem Übergang in einen Zustand S_2 , der durch Umwandlung einer A- in eine B-Aufspaltung erfolgt, ergibt sich der Exponent zu $e_2 := (n-1) - 1 + 2(|S_2| - 1)$. Da sich S_2 von S_1 nur in einer Aufspaltung unterscheidet gilt: $|S_2| = |S_1| \pm 1$ und somit $e_2 = n - 2 + 2(|S_1| \pm 1 - 1)$.

Der Exponent e_2 ist also immer kleiner gleich e_1 . Deshalb hat die höchste Potenz im Klammer-Polynom den Exponenten $n + 2(B - 1)$ wobei B die Anzahl der B-Gebiete darstellt.

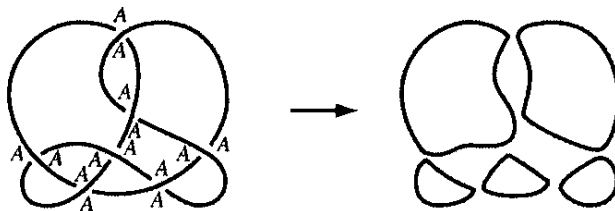


Abb. 3.6: Hier sind die B-Gebiete die Inseln

Ähnlich zeigt man, daß der Exponent der niedrigsten Potenz $-n - 2(A - 1)$ ist, worin A die Anzahl der A-Gebiete bezeichnet. Daher haben wir jetzt

$$\begin{aligned} \text{Höhe}(\langle K \rangle) &= n + 2(B - 1) - (-n - 2(A - 1)) \\ &= 2n + 2(A + B - 2) \end{aligned}$$

Da die Gesamtzahl aller Gebiete der Projektion ($A + B$) gleich $n + 2$ ist (Beweisidee: Projektion aufzeichnen, Kreuzungen entfernen dabei Gebiete

zusammenschließen bis keine Kreuzung und zwei Gebiete übrig sind), ist die Höhe($\langle K \rangle$) = $2n + 2n = 4n$.

□

3.7 Satz:

(Vermutung 1)

Zwei reduzierte alternierende Projektionen eines Knotens haben dieselbe Zahl von Kreuzungen.

Beweis:

Die erste Projektion habe n Kreuzungen und somit ist die Höhe des Klammer-Polynoms nach Hilfssatz 3.6 gleich $4n$. Da die Höhe eine Knoteninvariante ist, bleibt sie bei der Wahl einer anderen Projektion unverändert. Somit ist die Höhe des Klammer-Polynoms der zweiten Projektion auch gleich $4n$. Aus dem Hilfssatz 3.6 folgt dann wieder, daß die Anzahl der Kreuzungen in der zweiten Projektion ebenfalls gleich n ist. Somit haben beide Projektionen die gleiche Anzahl von Kreuzungen.

□

Eine weitere wichtige Eigenschaft von alternierenden Knoten wurde 1983 von William Menasco gezeigt:

3.8 Definition:

Sei $K_1 \# K_2$ eine *Zusammensetzung* der beiden Knoten K_1 und K_2 .

3.9 Satz:

Wenn der zusammengesetzte Knoten $K_1 \# K_2$ alternierend ist, so tritt er in jeder alternierenden Projektion zusammengesetzt auf.

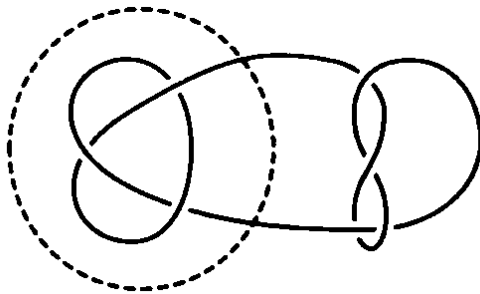


Abb. 3.7: Ein zusammengesetzter alternierender Knoten

Das bedeutet für zwei reduzierte alternierende Knoten K_1 und K_2 und für $c(K)$ - die Anzahl der Kreuzungen in K :

3.10 Satz:

Ist $K_1 \# K_2$ ein reduzierter alternierender Knoten, so gilt $c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$

(Folgt direkt aus Satz 3.9)

Offene Fragen:

- Welche anderen Knoten nehmen ihre minimale Selbstschnittzahl in einem speziellen Typ von Projektion an?
- Gibt es noch andere Klassen von Knoten für die die Gleichung $c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$ gilt?

Es können z.B. alle Aussagen auch auf die Klasse der adäquaten Knoten, die die Klasse der alternierenden umfaßt, ausgedehnt werden.

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel neben den Reidemeister-Bewegungen sind die **Flypes**:

3.11 Definition:

eine *Flying-Bewegung* ist eine Drehung eines Knotenteils um 180° .



Abb. 3.8: Flyping-Bewegung

Die sehr wichtige **Tait-Flyping-Vermutung**, die seit 1890 kursiert, besagt:

3.12 Satz:

Zwei reduzierte alternierende Projektionen desselben Knotens sind genau dann äquivalent, wenn sie durch eine Folge sogenannter **Flyping-Bewegungen** ineinander überführt werden können.

Diese Vermutung wurde erst 1990 von William Menasco und Morwen Thistlethwaite bewiesen. Sie ermöglicht es uns, alle reduzierten alternierenden Projektionen eines gegebenen Knotens zu zeichnen. Es gibt also nur endlich viele solcher Projektionen und wir können mit Hilfe der Flyping-Bewegung zu einer anderen Projektion übergehen, *ohne die Anzahl der Kreuzungen zu vergrößern*.

4 Alexander- und HOMFLY-Polynom:

Das Alexander-Polynom (1928) war das erste Knotenpolynom. 1969 zeigte John Conway, daß sich das Alexander-Polynom Δ mit Hilfe von nur zwei Regeln berechnen läßt:

$$\text{Regel 1: } \Delta(\bigcirc) = 1$$

Wichtig! Ein Unterschied besteht daran, daß diese Regel für jede Projektion des trivialen Knotens gelten soll. Die zweite Regel ähnelt der Flechtrelation, die vom Jones-Polynom erfüllt wird. Wir nehmen wieder drei Verschlingungen L_+ , L_- , L_0 , die überall, außer in den in Abb. 4.1 gezeigten Gebieten, identisch sind.

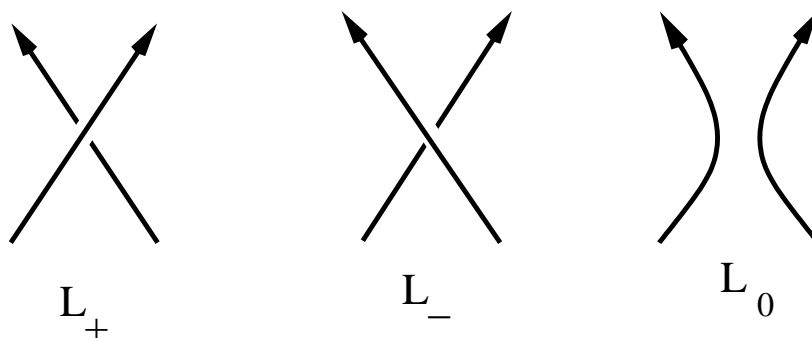


Abb. 4.1: Diese drei Verschlingungen genügen der Regel 2

$$\text{Regel 2: } \Delta(L_+) - \Delta(L_-) + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})\Delta(L_0) = 0$$

Mit diesen beiden Regeln läßt sich zeigen, daß das Alexander-Polynom eine Invariante der Knoten und Verschlingungen ist. Allerdings brauchen wir nun nicht mehr die Projektion, wie im Fall des Klammer-Polynoms, während der Berechnung in einem eingefrorenen Zustand zu halten.

Im Gegensatz zum Jones-Polynom sind Beispiele nichttrivialer Knoten bekannt, deren Alexander-Polynom gleich 1 ist.

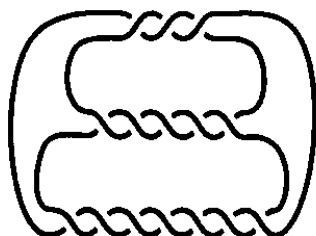


Abb. 4.2: Das Δ -Polynom des $(-3,5,7)$ -Brezelknotens ist 1.

Fraglich ist jetzt nur noch, ob die Regel 2 wirklich immer die Berechnung des Alexander-Polynoms gestattet. Läßt sich also das Polynom einer gegebenen Verschlingung durch die Alexander-Polynome einfacherer Verschlingungen ausdrücken? Dies ist mit Hilfe des folgenden Satzes leicht zu sehen.

4.1 Satz:

Jede Projektion läßt sich durch Abändern einiger Kreuzungen in die Projektion einer trivialen Verschlingung umwandeln. (Adams [1] Kapitel 3.1.)

Wir wählen nun bei einer Projektion eine der Kreuzungen aus, die man nach Satz 4.1 ändern muß. Jetzt setzen wir für L_+ oder L_- in der Flechtrelation die Ausgangsverschlingung ein. Wir können ihr Polynom durch das Polynom einer Verschlingung ausdrücken, deren Projektion eine Kreuzung weniger hat, und durch das Polynom einer Verschlingung, deren Projektion eine Kreuzung näher an der trivialen Projektion ist. Wiederholt man diesen Vorgang, so ergibt sich ein baumartiges Schema, das **auflösender Baum** genannt wird. An der Spitze steht die ursprüngliche, und an den Blättern nur noch triviale Verschlingungen.

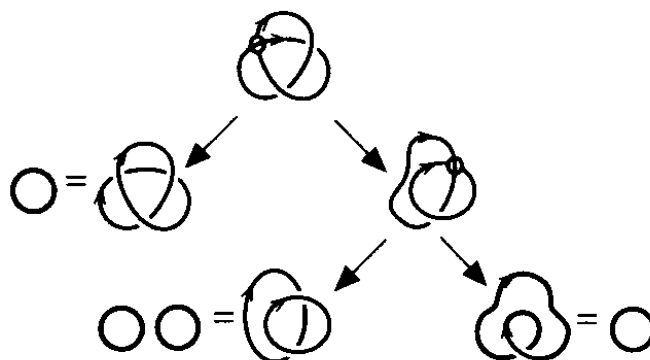


Abb. 4.3: Auflösender Baum der Kleeblattschlinge

4.2 Definition:

Die *Tiefe einer Verschlingung* definieren wir als die minimale Tiefe aller ihrer auflösender Bäume. Diese Invariante ist zugleich ein Maß für die Kompliziertheit-

heit der Rechnung zur Bestimmung des Alexander-Polynoms.

Offene Probleme:

- Alle Verschlingungen der Tiefe n für $n > 2$ sind zu klassifizieren.
- Man zeige, daß es zu einer vorgegebenen Anzahl von Komponenten und einer vorgegebenen Tiefe nur endlich viele Verschlingungen gibt.

Das Alexander-Polynom war über 50 Jahre lang das einzige Polynom. Nachdem aber Jones das Jones-Polynom entdeckt hatte, begannen viele Mathematiker nach einem Polynom mit zwei Variablen zu suchen, das sowohl eine Verallgemeinerung des Jones- als auch des Alexander Polynoms ist. Als erstes wurde das **Homfly-Polynom** gefunden, für das wir das Symbol $P(L)$ verwenden.

$$\text{Regel 1: } P(\bigcirc) = 1$$

Diese Regel gilt wie beim Alexander-Polynom für jede Projektion des Unknotens.

Sind L_+ , L_- und L_0 drei Verschlingungen, die überall, außer in den in Abbildung 4.1 dargestellten Kreuzungen, übereinstimmen, so soll

$$\text{Regel 2: } lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0$$

Man beachte die große Ähnlichkeit dieser Regel mit der 2. Regel des Alexander-Polynoms und der Flechtrelation, die das Jones-Polynom erfüllt.

Bei allen drei Polynomen müssen wir nicht die Orientierung eines Knotens berücksichtigen. Haben wir es aber mit einer Verschlingung zu tun, so kann die Änderung einiger, aber nicht aller Orientierungen ihrer Komponenten Auswirkungen auf das Polynom haben.

Für die Berechnung eines Homfly-Polynoms brauchen wir, genauso wie oben beim Alexander-Polynom, einen auflösenden Baum. Diese Art der Berechnung ist aber sehr zeitaufwendig.

Das Homfly-Polynom besitzt folgende sehr interessante Eigenschaften:

4.3 Definition:

Sei $L_1 \cup L_2$ die *unzusammenhängende Summe* der Verschlingungen L_1 und

L_2 . Man erhält sie, indem man einfach L_1 an L_2 heranschiebt, ohne daß sie sich in irgendeiner Weise überschneiden oder verschlingen.

4.4 Satz:

Es gilt

$$P(L_1 \cup L_2) = -(l + l^{-1})m^{-1}P(L_1)P(L_2)$$

(Der Beweis ist etwas rechenintensiv, aber nicht sonderlich kompliziert: Adams [1] Kapitel 6.3)

4.5 Definition:

Sei $L_1 \# L_2$ eine beliebige *Zusammensetzung* zweier Verschlingungen (wie Def. 3.8 nur Verschlingungen statt Knoten).

4.6 Satz:

$$P(L_1 \# L_2) = P(L_1)P(L_2)$$

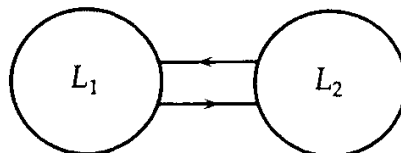


Abb. 4.4: Eine Projektion von $L_1 \# L_2$

Beweis

Wir kippen wie in Abb. 4.5 die Projektion von L_2 in zwei verschiedene Richtungen und erhalten L_+ und L_- . Dies sind immer noch Projektionen von $L_1 \# L_2$. Außerdem sei L_0 einfach die unzusammenhängende Summe von L_1 und L_2 .

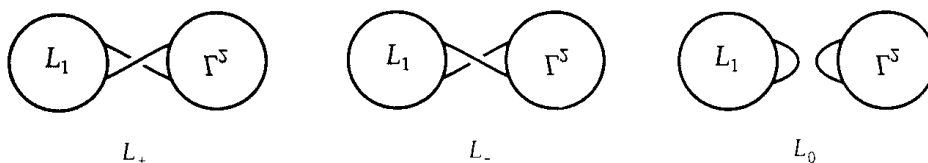


Abb. 4.5: Drei zusammengehörende Verschlingungen

Die zweite Regel ergibt nun: $lP(L_1\#L_2) + l^{-1}P(L_1\#L_2) + mP(L_1 \cup L_2) = 0$

Wir wissen nach Satz 4.4 daß $P(L_1 \cup L_2) = -(l + l^{-1})m^{-1}P(L_1)P(L_2)$ gilt. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} & lP(L_1\#L_2) + l^{-1}P(L_1\#L_2) + m(-(l + l^{-1})m^{-1}P(L_1)P(L_2)) = 0 \\ \Leftrightarrow & (l + l^{-1})P(L_1\#L_2) + (-(l + l^{-1}))P(L_1)P(L_2) = 0 \\ \Leftrightarrow & P(L_1\#L_2) = P(L_1)P(L_2) \end{aligned}$$

□

Offenbar spielt es keine Rolle, an welcher Stelle die Komponenten verbunden werden. Wir haben damit unser erstes Beispiel für Verschlingungen, die verschieden sind, aber mit Hilfe des Homfly-Polynoms nicht auseinander gehalten werden können.

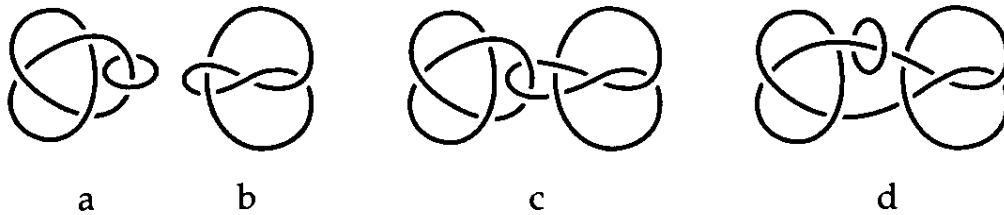


Abb. 4.6: (a) L_1 . (b) L_2 . (c) 1. Variante für $L_1\#L_2$. (d) 2. Variante für $L_1\#L_2$.

Das Homfly-Polynom eignet sich besser für das Unterscheiden von Konten als das Jones- und Alexander-Polynom, da diese beide nur Spezialfälle sind. Allerdings ist es leider auch keine vollständige Knoteninvariante. Man kann mit ihm nicht alle Knoten unterscheiden.

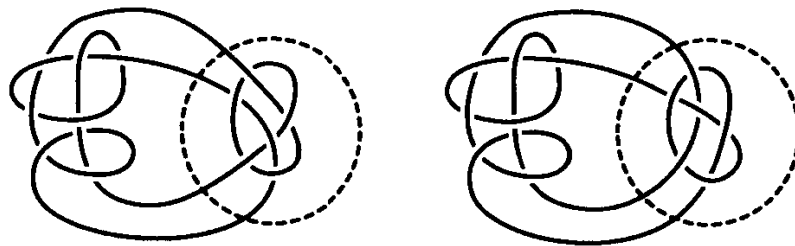


Abb. 4.7: Diese Mutanten haben dasselbe HOMFLY-Polynom

4.7 Satz:

Man erhält das Jones-Polynom aus dem Homfly-Polynom einfach durch folgende Substitutionen:

$$l := it^{-1} \quad (i \in \mathbb{C} \text{ ist die imaginäre Einheit})$$

$$m := i(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}).$$

So wird die Flechtrelation des Homfly-Polynom zur Flechtrelation (Satz 2.6) des Jones-Polynom.

4.8 Satz:

Man erhält das Alexander-Polynom aus dem Homfly-Polynom durch folgende Substitutionen:

$$l := i$$

$$m := i(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$$

Beweis:

Regel 1 stimmt offensichtlich überein.

Sei nun $l := i$ und $m := i(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$

$$\begin{array}{llll} lP(L_+) & +l^{-1}P(L_-) & +mP(L_0) & = 0 \\ i\Delta(L_+) & +i^{-1}\Delta(L_-) & +i(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(L_0) & = 0 \\ \Delta(L_+) & -\Delta(L_-) & +(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(L_0) & = 0 \end{array}$$

□

Literatur

- [1] Adams, C.:
The knot book,
W.H. Freeman and Company, New York, (1994).

- [2] Kauffman, L.:
New invariants in the theory of knots,
In Amer. Math. Mon. (März), 195-242, (1983).